01
MATHEMATIQUES ET INTERACTIONS DES MATHEMATIQUES

Président de la section
Yann BRENIER

Membres de la section
Rémy ABGRALL
Abdallah ASSI
Michel BOILEAU
Virginie BONNAILLIE-NOEL
Jean-Benoît BOST
Yannick BOURLES
Gilles CARRON
Gaëtan CHENEVIER
Bertrand DEROIN
François DIGNE
Christine DISDIER
Elisabeth GASSIAT
Alice GUIONNET
James LEDOUX
Christine LESCOP
Frank LORAY
Lionel MOISAN
Jean-Marc SAC-EPEE
Marie-France SAGOT
Nikolay TZVETKOV

La recherche en mathématiques est particulièrement active et réputée en France, mais souffre tout de même d'un certain manque de visibilité dans la société. Elle semble encore, pour la plupart des citoyens, une activité mystérieuse et insondable, sans grand impact, voire sans objet aux yeux des moins informés qui croient parfois la discipline figée depuis des siècles. Par ailleurs, même dans le milieu scientifique, les mathématiques peuvent être encore perçues avant tout comme une discipline de formation et de service, sans thématique propre de grande importance. Les crises financières et environnementales récentes ont pourtant révélé au grand public l'importance et l'omniprésence des mathématiques et plus particulièrement des modèles mathématiques. Nombre de mathématiciens ont pu voir, avec un mélange de fierté et d'inquiétude, l'importance de leur discipline révélée au grand public, alors que son utilisation était dénoncée à plusieurs reprises, souvent avec véhémence, par des personnalités de renom. Il faut sans doute remonter à l'époque de la guerre froide pour retrouver de telles mises en cause de l'utilisation des mathématiques et, plus particulièrement, de modèles mathématiques, qui sont en fait, dans bien des cas, conçus et développés en dehors du cadre strict de la recherche en mathématiques (laboratoires, banques, agences...). Cela donne une responsabilité éminente aux mathématiciens qui voient leur discipline jouer un rôle clé, de manière évidente au côté des disciplines soeurs que constituent la physique et l'informatique, et de façon plus souterraine dans les autres. La création de l'INSMI au sein du CNRS est à cet égard un événement de grande importance: en interne, pour encourager les thématiques nouvelles et maintenir l'ensemble du spectre mathématique; en externe, pour développer les interactions avec les autres disciplines et soutenir les réponses aux demandes extérieures. La France peut se prévaloir d'une place de premier plan dans la recherche mondiale en mathématiques, dans presque tous les grands domaines, et il est essentiel de l'y maintenir.

1 - RAYONNEMENT DES MATHÉMATIQUES FRANCAISES

Soulignons d'abord la vitalité et l'excellence des mathématiques françaises. Il suffit pour s'en persuader de regarder la place prise par l'école française au congrès international de mathématiques à Hyderabad en août 2010, un événement qui a lieu tous les quatre ans et qui voit la remise des médailles Fields. L'école française y a été reconnue tout particulièrement par l'obtention de deux des quatre médailles, celles de Cédric Villani (directeur de l'IHP et professeur à Lyon) et Ngô Bao Châu (franco-vietnamien, professeur à Orsay, détaché aux USA), ainsi que par la remise du prix Gauss à Yves Meyer. La présence de l'école française (chercheurs en poste en France ou de formation récente en France) est considérable. On compte 4 conférenciers pléniers sur 20 (dont 2 CNRS, dans les domaines de théorie du contrôle, arithmétique, géométrie algébrique et systèmes dynamiques), et sur les 20 sections disciplinaires, 13 comptaient au moins un conférencier français : algèbre (1), théorie des nombres (2), géométrie algébrique (2), géométrie (3) , topologie (1, en poste à l'étranger), groupes et algèbres de Lie (1), analyse fonctionnelle (1), systèmes dynamiques (4), équations aux dérivées partielles (3), physique mathématique (4), probabilités et statistiques (1), contrôle (1), sciences mathématiques et technologie (1). Dans le même ordre d'idée, le prix Abel (créé à l'image des prix Nobel et remis pour la première fois en 2003 à un mathématicien français, Jean-Pierre Serre) a été remis depuis à Jacques Tits (mathématicien belge ayant exercé au Collège de France) en 2008 pour ses travaux dans la formation de la théorie moderne des groupes, et à Mikhaïl Gromov (mathématicien russe exerçant à l'IHES et à NYU) en 2009 pour ses contributions révolutionnaires à la géométrie.

2 - EXEMPLES DE PROGRES RECENTS EN MATHÉMATIQUES

Les exemples qui suivent ne sont destinés qu'à illustrer la diversité et la richesse des découvertes récentes en mathématiques. Il n'est en aucun cas question de faire une description exhaustive et détaillée de l'ensemble de l'activité, même de plus haut niveau. Des pans entiers des mathématiques en sont absents. La classification adoptée est aussi très partielle et largement arbitraire, notamment compte tenu de la forte imbrication des différents domaines. Les exemples sont souvent reliés, de près ou de loin, à des questions posées dans d'autres sciences, ce qui souligne le caractère naturellement interactif des mathématiques.

2.1 Théorie des nombres et systèmes dynamiques

Le programme de Langlands tente de mettre à jour des connexions mystérieuses entre la théorie des nombres et la théorie des représentations de groupes (dont un cas particulier implique le grand théorème de Fermat). Ses aspects géométriques sont aussi centraux en géométrie algébrique ; cette « dualité» est en rapport avec d'autres dualités provenant de la théorie quantique des champs et la théorie des cordes en physique. La recherche est toujours extrêmement active dans ce domaine et l'école française y contribue au tout premier plan. Mentionnons par exemple la démonstration récente par G. Laumon, B.C. Ngo et J.-L. Waldspurger du « lemme fondamental », fameux obstacle soulevé par Langlands il y a plus de vingt ans et dont les retombées sont immenses, ainsi que la démonstration de la conjecture de Sato-Tate. Un autre axe majeur émerge actuellement, qui complète le programme initial de Langlands, avec le développement d'un avatar p-adique (imaginé par C. Breuil et dont l'inspiration et la nécessité remontent aux travaux de Wiles sur le grand théorème de Fermat) suggérant un tissu de conjectures à découvrir mêlant l'analyse p-adique au programme de J.-M. Fontaine. La démonstration récente par P. Colmez du cas de la dimension deux constitue une avancée fondamentale sur ces questions et ouvre de nombreuses voies. On voit enfin se tisser de nouveaux liens entre différents problèmes, par exemple entre la version géométrique de la correspondance de Langlands et la résolution, à l'aide de cohomologie quantique, de vieux problèmes de géométrie énumérative. Cette résolution en a d'ailleurs inspiré une autre, de nature combinatoire, grâce à l'émergence de la géométrie tropicale. Il convient de remarquer au passage qu'à travers de telles interactions profondes avec d'autres disciplines extrêmement avancées, la combinatoire montre une maturité nouvelle.

La combinatoire additive se trouve en interaction avec la théorie ergodique, la théorie des nombres et l'analyse harmonique. Les méthodes combinées de ces différents sujets ont permis de s'attaquer à des problèmes anciens sur la structure de l'ensemble des nombres premiers ; le résultat le plus spectaculaire étant qu'il contient des suites arithmétiques de longueur arbitrairement longue (Green-Tao 2006). La démonstration repose sur une philosophie déjà présente en théorie ergodique qui consiste à montrer qu'un sous-ensemble d'un ensemble structuré est lui-même structuré en dehors d'une partie négligeable, et utilise des méthodes de nature « non commutatives ». Le domaine a soulevé un nombre important de problèmes d'intérêt indépendant, avec entre autres, de nouvelles connexions avec la théorie géométrique des groupes ou les EDP.

Enfin, on peut souligner à quel point la géométrie p-adique introduite par Berkovich au début des années 90 s'est imposée ces dernières années pour ses diverses applications en géométrie complexe, arithmétique, équations différentielles et systèmes dynamiques.

2.2 Géométrie et topologie

La résolution de la conjecture de Poincaré (les variétés fermées simplement connexes de dimension 3 sont toutes homéomorphes à la sphère) par Gregory Perelman il y a quelques années (via la démonstration de la conjecture de géométrisation de W. Thurston) a été l'aboutissement d'un siècle de topologie géométrique et l'un des événements le plus spectaculaire des dernières années, en mathématiques.

Renouvelant un programme lancé par R. Hamilton sur l'étude du flot de Ricci, elles reposent sur des méthodes variationnelles (liées aux équations aux dérivées partielles issues de la géométrie riemannienne), et sont pour le moment totalement disjointes des grands courants précédents en topologie de dimension 3 (homologie de Floer, invariants quantiques). Etant donné l'importance et les retombées de ces courants ces quinze dernières années, il n'est même pas la peine d'insister sur le caractère extrêmement prometteur d'une assimilation des méthodes de Hamilton-Perelman. La médaille Fields ainsi que le premier prix Clay du millenium ont été attribués à G. Perelman. Des équipes françaises se sont distinguées dans la vérification des travaux de G. Perelman et, de même, la remise officielle du prix Clay a été programmée en juin 2010 en France, à l'Institut Henri Poincaré.

En ce qui concerne la géométrie symplectique et la topologie en basse dimension, les théories d'homologie à la Floer continuent de se développer et d'apporter des réponses spectaculaires à de nombreux problèmes ouverts, notamment celle de Heegaard-Floer qui permet de détecter le genre des noeuds et leur éventuelle nature fibrée, ainsi que l'homologie de Khovanov. Après les résultats impressionnants de Perelman, il est important de continuer à progresser dans la compréhension des liens entre la géométrie, les théories quantiques des champs topologiques et les théories d'homologie de Floer ou Khovanov, notamment par l'étude de la conjecture qui exprime le volume d'une variété hyperbolique de dimension 3 comme limite d'invariants quantiques.

Après le succès des travaux de Perelman utilisant le flot de Ricci pour démontrer la géométrisation des variétés de dimension 3, on s'attend à ce que l'étude du flot de Kähler-Ricci permette des avancées importantes en géométrie complexe (notamment vers le programme de Mori). Toujours en géométrie complexe et géométrie algébrique complexe, les programmes de Donaldson Tian, visant à établir un critère algébrique de positivité pour déterminer les classes de Kähler possèdant une métrique extrémale ou à courbure scalaire constante, ont connu des développements importants avec, par exemple, la résolution par Donaldson du cas des surfaces toriques.

Enfin, le concept de courbure de Ricci a été considérablement renouvelé et généralisé à des espaces métriques très généraux, par des méthodes d'inégalités fonctionnelles, liées à la théorie des probabilités et du transport optimal.

2.3 Equations aux dérivées partielles et analyse numérique

Les équations aux dérivées partielles, le plus souvent non-linéaires, sont omniprésentes en physique mathématique et en géométrie différentielle et font l'objet de très nombreuses recherches. L'école française est particulièrement active dans ce domaine.

Ainsi, pour les edp de la théorie cinétique des gaz, après les avancées considérables obtenues par Golse et Saint-Raymond sur la dérivation rigoureuse des équations de Navier-Stokes, celles de Desvillettes et Villani concernant le retour vers l'équilibre des solutions de l'équation de Boltzmann, le travail récent de Mouhot et Villani établit la première justification mathématique de l'amortissement Landau des solutions des équations de Vlasov. Le domaine voisin des équations de la mécanique des fluides constitue toujours un domaine de prédilection pour les analystes des edp non-linéaires. L'étude des phénomènes d'oscillation y a connu des progrès spectaculaires par l'utilisation de la méthode d'intégration convexe de Gromov qui a permis de comprendre plus profondément les limites du concept de solutions faibles notamment pour les équations d'Euler. Dans un ordre d'idée voisin, de nouvelles techniques de régularité par compensation ont vu le jour pour les systèmes de lois de conservation présentant certaines anti-symétries.

Du côté des edp géométriques, les avancées récentes sur l'existence des «wave maps» (équivalent lorentzien des applications harmoniques) ont fait interagir d'une manière spectaculaire les idées de «compacité-concentration» développées par Pierre-Louis Lions dans les années 80 et les idées d'analyse harmonique appliquées aux EDP non linéaires, introduites par Jean Bourgain au début des années 90. Ces interactions ont eu d'autres applications et vont sans doute animer de futures recherches dans l'analyse des EDP non linéaires. Les équations de la relativité générale constituent par ailleurs un domaine toujours très actif et, dans la foulée des résultats fondamentaux de Christodoulou-Klainerman sur la stabilité de l'espace de Minkowski, c'est la stabilité des espaces de Kerr (liés à la modélisation des trous noirs) qui est dorénavant à l'ordre du jour. Enfin, l'analyse de régularité des solutions des équations du transport optimal (généralisation des équations de Monge-Ampère réelles) ont révélé des liens surprenants avec la géométrie riemannienne et les variétés à courbure sectionnelle positive.

La théorie des équations aux dérivées partielles interagit dorénavant ouvertement avec la théorie des probabilités, notamment par le développement de l'étude des edp avec coefficients ou seconds membres stochastiques, par l'utilisation d'arguments de mécanique statistique pour l'étude de la régularité « générique » de certaines équations et, de façon frappante, par l'analyse de l'algorithme de Métropolis par l'analyse semi-classique. La théorie des jeux à champ moyen, développé par Lasry et Lions, a de fortes implications pratiques, notamment en économie, et, d'un point de vue conceptuel, unifie des points de vue précédemment séparés (contrôle stochastique, grands systèmes de particules, transport optimal, etc...).

A la fin des années 80, DiPerna et Lions ont complètement renouvelé la théorie des équations différentielles ordinaires à coefficients peu réguliers par une approche relevant, paradoxalement, de la théorie des équations aux dérivées partielles. Ce domaine a connu dans les dernières années d'importants développements, incluant les équations différentielles stochastiques. Le cas des coefficients à variation bornée est maintenant bien compris mais de nouveaux résultats autorisant une simple régularité fractionnaire viennent d'être établis pour les équations du second ordre, ce qui constitue une percée remarquable.

Enfin, l'analyse des équations aux dérivées partielles issues de la modélisation en biologie est en plein essor, à l'interface des équations cinétiques, paraboliques, avec de nombreuses questions qualitatives liées à la théorie des systèmes dynamiques.

Dans le domaine de l'analyse numérique, on note l'explosion des méthodes multi-échelles (avec notamment les schémas conservant l'asymptotique, les algorithmes rapides de calcul d'opérateurs intégraux de Fourier, les méthodes de rayons gaussiens, parmi bien d'autres). Une intéressante interaction avec l'analyse stochastique est l'utilisation du chaos de Wiener pour l'étude paramétrique des modèles numériques, en relation avec la théorie de l'homogénéisation. Bien entendu, au-delà de l'analyse numérique, le calcul scientifique constitue une interface de première importance des mathématiques avec les autres sciences.

2.4 Probabilités et statistiques

L'étude des matrices aléatoires en relation avec les «probabilités non-commutatives», reste un domaine particulièrement actif de la théorie des probabilités. Ainsi la preuve de l'universalité des espacements des valeurs propres (loi asymptotique indépendante des détails de la matrice) par Tap-Vu et Erdös-Schlein-Yau est un résultat longuement attendu, qui justifie l'approximation des niveaux d'énergie comme valeurs propres de grandes matrices aléatoires. On peut noter que les grandes matrices aléatoires sont aussi très utiles en statistiques (modélisation de grands tableaux de données aléatoires) et en télécommunication (filtrage linéaire, données de grande dimension). A ce sujet, les inégalités de concentration sont toujours très largement développées dans le cadre de l'apprentissage statistique. De façon générale, l'analyse des milieux aléatoires de toute sorte a beaucoup progressé (notamment les cartes, arbres, graphes, polymères, etc... aléatoires). La démonstration par Talagrand de la formule des répliques de Talagrand est un bon exemple de la place éminente occupée par les probabilités à l'interface des mathématiques avec la physique mathématique et la physique théorique. Un autre exemple est fourni par les travaux de Simonov (médaille Fields 2010) dans le domaine de la percolation, des modèles à invariance conforme, dans la lignée de Schramm. De même, l'imbrication des probabilités avec la combinatoire, l'algorithmique et l'informatique théorique est de plus en plus manifeste. L'interaction avec les sciences du vivant est en plein essor, avec notamment la modélisation probabiliste de l'évolution des espèces par des processus stochastiques. Enfin, il est inutile d'insister sur le rôle proéminent des probabilités dans la modélisation des marchés financiers.

3 – INTERACTIONS ET APPLICATIONS DES MATHEMATIQUES

La présence des autres sciences en mathématiques est généralisée. C'est évidemment le cas de la physique non-linéaire et de la physique statistique, très fréquemment impliquées dans les recherches en probabilité et équations aux dérivées partielles, lesquelles sont traditionnellement et naturellement tournées vers les applications des mathématiques. La théorie des champs, classiques et quantiques, la théorie des cordes, ont inspiré nombre de percées conceptuelles au coeur même des mathématiques habituellement considérées comme les plus « pures ». Inversement, la théorie des nombres est à l'origine de l'essentiel des méthodes cryptographiques modernes, alors que l'analyse harmonique a permis le développement des techniques de transformation en ondelettes et de compression d'images. L'ingénierie est traditionnellement, et particulièrement en France, liée à l'analyse numérique et aux équations aux dérivées partielles, au travers du calcul scientifique et de la modélisation. Malgré une certaine désindustrialisation du territoire national, les mathématiciens restent très présents dans les secteurs de haute technologie, notamment dans les domaines du traitement d'image et de la simulation numérique. Plus récemment, on note un véritable emballement en direction des sciences du vivant, pas seulement en probabilités, statistiques et équations aux dérivées partielles, comme on pouvait s'y attendre, mais aussi au travers de l'implication en profondeur de mathématiciens habituellement classés comme « purs ». Bien entendu, les sciences sociales et économiques ne sont pas en reste, et l'imbrication avec les mathématiques est manifeste, en particulier en France, où sont formés nombre d'analystes du risque et des marchés financiers.

4 – STRUCTURATION DES MATHEMATIQUES

Les mathématiques françaises restent essentiellement universitaires (environ 3 000 enseignants-chercheurs pour 350 chercheurs CNRS). De nombreux organismes (INRIA, INRA, CEA, etc.) accueillent aussi des mathématiciens, le plus souvent aux interfaces mais pas toujours. Soulignons qu'il y a peu de laboratoires du CNRS relevant de la section 01 associés à des écoles d'ingénieurs, ou avec d'autres EPST. Cela est sans doute en partie dû à l'influence trop limitée du CNRS au travers de la section 01 dans le domaine de la modélisation et du calcul scientifique, notamment par rapport à l'INRIA qui a dorénavant une implantation forte en milieu universitaire, essentiellement dans le domaine des mathématiques appliquées. Les recrutements dans ces domaines restent relativement faibles (il est vrai que la concurrence des autres EPST (CEA, INRIA), comme d'autres sections du CNRS, est importante). Les mathématiciens ont pourtant un rôle moteur à jouer, au vu des enjeux scientifiques et techniques.

Malgré l'absence de laboratoires propres, avec une soixantaine d'UMR, bien réparties sur la carte universitaire française et dans les limites des moyens humains et financiers engagés, le CNRS et l'INSMI jouent un rôle essentiel de structuration nationale des mathématiques françaises. Avec une vision d'ensemble de l'activité nationale, ils participent au suivi et à l'évaluation des laboratoires mixtes, dans un souci permanent de concertation avec les universités. La mobilité de et vers l'enseignement supérieur, souvent citée comme exemplaire, est largement la conséquence de la structuration nationale effectuée par le CNRS avec les UMR. Dans le même ordre d'idée, on ne saurait trop rappeler l'importance des GDR, qui permettent de fédérer les chercheurs à l'échelle nationale ou internationale (GDRE) et favorisent l'insertion des jeunes chercheurs. Leur rôle structurant est particulièrement efficace, notamment par rapport aux contrats de recherche de l'ANR.